數學傳播 50卷1期, pp. 117-138

# 本原 Heron 數組公式及若干相關結果

吳　波

**摘要**: 本文從三角形著手並運用初等數論的知識給出本原 Heron 數組公式。在本原 Heron 數組公式的基礎上, 又給出了本原 Heron 三角形的高為整數的充要條件和本原 Heron 三角形内切圓及旁切圓半徑均為整數的充要條件。據此構造出了無數多個内切圓及旁切圓半徑均為整數且不可分解的銳角本原 Heron 三角形。基於本原 Heron 數組公式, 還證明了本原 Heron 三角形的若干性質。

**關鍵字**: 勾股三角形, Heron 三角形, 本原 Heron 數組公式, 整數幾何。

## 1. 引言

在本文中我們約定: $\triangle ABC$ 的三邊長按通常方式記作 $a,b,c$, 外接圓半徑和內切圓半徑分別記作 $R,r$, 面積則記作 $T$. 對 $x,y,z\in\mathbb{Z}$, 記:

$$(x,y,z)=\gcd(x,y,z),\quad [x,y,z]=\operatorname{lcm}(x,y,z).$$

三邊長均爲正整數的三角形叫做整邊三角形。有一個角爲直角的整邊三角形叫做勾股三角形 (也叫做“Pythagorean 三角形”)。而面積也爲整數的整邊三角形則叫做 Heron 三角形 (Heron, 公元 1 世紀, 古希臘數學家。有些文章中將“Heron”譯作“海倫”或“海侖”)。三邊長的最大公因數爲 1 時的勾股三角形和 Heron 三角形分別叫做本原勾股三角形和本原 Heron 三角形。由於勾股三角形的面積必爲整數, 因此勾股三角形必爲 Heron 三角形。

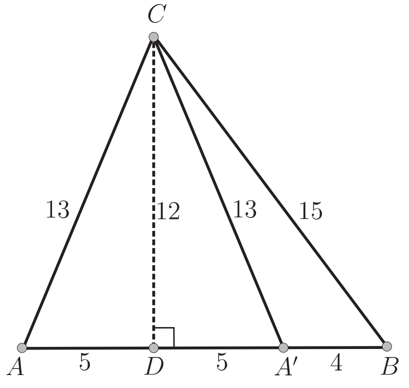


圖1

文獻 [1][2] 的相關章節中介紹了歷史上構造 Heron 三角形的幾種方法或公式。其中之一是: 用有一條直角邊相等的兩個勾股三角形去拼合或分割成 Heron 三角形。比如在圖 1 中, 三邊長分別爲 5, 12, 13 和 9, 12, 15 的兩個勾股三角形 $ADC(A'DC)$ 和 $BDC$ 可以用拼合(在$CD$ 異側) 與分割(在 $CD$ 同側) 的方式生成兩個 Heron 三角形: $ABC$ 和 $A'BC$ — 直角邊 $CD$即是這兩個 Heron 三角形的公共的高。

反過來, Heron 三角形是否都能用它的某條高分成兩個勾股三角形呢? 如果能, 就稱它是可分解的; 反之, 就稱它是不可分解的。

易知: Heron 三角形可被它的某條高分解的充要條件是這條高爲整數 (*注: 在這裡, 默認勾股三角形是可分解的 — 由它的直角邊 (也是高) 分解爲它本身與另一個面積爲 0 的退化的勾股三角形*)。不可分解的 Heron 三角形是存在的, 比如文獻 [3] 中就提到陳瑞琛就給出過一個例子: $\triangle ABC$ 中 $a=13$, $b=40$, $c=45$. 可算得其面積爲 252, 所以它是一個Heron 三角形。易知 $\triangle ABC$ 三條高均不爲整數, 因此它是不可分解的。

令 $r, r_a, r_b, r_c$ 分別表示 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑和頂點 $A, B, C$ 所對旁切圓的半徑。文獻 [4] 給出了 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$ 的本原 Heron 三角形的幾個例子。文獻 [5] 則肯定地回答了文獻 [4] 中提出的兩個問題, 即:

**命題**1 (見文獻 [5]): 存在無窮多個可分解的銳角本原 Heron 三角形滿足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$.

**命題**2 (見文獻 [5]): 存在無窮多個本原 Heron 三角形滿足 $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$.

文獻 [5] 還在篇末提出了需要進一步研究的如下問題:

**問題**1: 是否有無窮多個不可分解的銳角本原 Heron 三角形滿足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$?

本文擬從三角著手並運用初等數論的知識給出本原 Heron 數組公式。在本原 Heron 數組公式的基礎上給出本原 Heron 三角形的高爲整數的充要條件和本原 Heron 三角形內切圓及旁切圓半徑均爲整數的充要條件。並據此解決問題 1。基於本原 Heron 數組公式, 本文還將證明本原 Heron 三角形的若干性質。

## 2. 預備知識

本小節中我們先給出若干預備定理。

**定義**1 (見文獻 [6]): $a, e \in \mathbb{Z}^+$, 如果 $a^2 \mid e$, 則 $a$ 叫做 $e$ 的平方因子 (顯然 1 是任何正整數的平方因子)。如果除 1 外 $e$ 沒有其他的平方因子, 我們就說 $e$ 是無平方因子數, 或者說 $e$ 無平方因子。比如 1, 2, 3, 5, 6, ... 等就是無平方因子數。

注: 按此處定義, 1 也算無平方因子數。這樣的定義便於某些命題的統一表述。

**定義**2: 對給定的無平方因子數 $e$, 定義 $F(e)=\{k\sqrt{e}\mid k\in\mathbb{Q}\}$.

對給定的無平方因子數 $e$, 下面給出幾個與數集 $F(e)$ 有關的結論。

**引理**1: 若 $a=k\sqrt{e}$, 其中 $k\in\mathbb{Q}$, $e$ 是無平方因子數, 則 $a\in\mathbb{Q}$ 的充要條件是: $e=1$ 或 $k=0$.

**引理**2: 若 $a,b\in F(e)$, $m,n\in\mathbb{Q}$, 則 $ma+nb\in F(e)$, $ab\in\mathbb{Q}$, $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ $(b\neq 0)$. 特別地: $a\sqrt{e}\in\mathbb{Q}$, $a^2\in\mathbb{Q}$.

**引理**3: 對任意給定的實數 $a$, 若 $a^2\in\mathbb{Q}^+$, 則存在唯一的無平方因子數 $e$, 使得 $a\in F(e)$.

**引理**4: $e$ 是無平方因子數。若 $\theta\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, 則 $\sin\theta\in F(e)$, $\cos\theta\in\mathbb{Q}$ 的充要條件是: $\tan\dfrac{\theta}{2}\in F(e)$.

**證明**: (i) 當 $\sin\theta\in F(e)$, $\cos\theta\in\mathbb{Q}$ 時,

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}=\frac{1-\cos\theta}{\sqrt{e}\sin\theta}\sqrt{e}.$$

由引理 2 及定義 2 知: $\tan\dfrac{\theta}{2}\in F(e)$.

(ii) 當 $\tan\dfrac{\theta}{2}\in F(e)$ 時, 由萬能公式

$$\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}},\qquad \sin\theta=\frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

結合引理 2 及定義 2 即知: $\sin\theta\in F(e)$, $\cos\theta\in\mathbb{Q}$. □

當 $e=1$ 時, $F(e)=\mathbb{Q}$. 因此有

**推論**: 若 $\theta\neq k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, 則 $\sin\theta\in\mathbb{Q}$, $\cos\theta\in\mathbb{Q}$ 的充要條件是: $\tan\dfrac{\theta}{2}\in\mathbb{Q}$.

**定義**3: 三邊長及面積均爲有理數的三角形叫做有理三角形。

**定理**1: $\triangle ABC$ 三邊長均爲有理數的充要條件是: 存在無平方因子數 $e$ 使得

$$\tan\frac{A}{2},\ \tan\frac{B}{2},\ \tan\frac{C}{2}\ \text{中的兩者及外接圓半徑}\ R\in F(e).$$

**證明**: 因 $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$, 由引理 2 和定義 2 可知:

當 $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}$ 中有兩者屬於 $F(e)$ 時, 則第三者也屬於 $F(e)$.

由此顯然有: $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}$ 中“有兩者屬於 $F(e)$” 等價於 “三者都屬於 $F(e)$”。

(i) 充分性 因 $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}\in F(e)$. 由引理 4 可知: $\sin A,\sin B,\sin C\in F(e)$. 又, $R\in F(e)$, 由正弦定理結合引理 2 即知: $\triangle ABC$ 三邊長 $a,b,c\in\mathbb{Q}$, 充分性得證。

(ii) 必要性 因 $\triangle ABC$ 三邊長 $a,b,c\in\mathbb{Q}$, 由餘弦定理可知:

$$\cos A,\cos B,\cos C\in\mathbb{Q} \text{ 且 } \sin^2 A=1-\cos^2 A\in\mathbb{Q}^+.$$

結合引理 3 可知: 存在無平方因子數 $e$ 使得 $\sin A\in F(e)$.

再結合正弦定理及引理 2 可知:

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{a}{2\sqrt{e}\sin A}\sqrt{e}\in F(e).$$

$$\sin B=\frac{b}{2R}=\frac{b}{2R\sqrt{e}}\sqrt{e}\in F(e),\qquad \sin C=\frac{c}{2R}=\frac{c}{2R\sqrt{e}}\sqrt{e}\in F(e).$$

結合引理 4 即知: $\tan\dfrac{A}{2},\tan\dfrac{B}{2},\tan\dfrac{C}{2}\in F(e)$. 而上面已證得 $R\in F(e)$. 因此必要性得證。
綜上可知: 定理 1 結論成立。 □

對有理三角形, 因其三邊長爲有理數, 由定理 1 可知: 存在無平方因子數 $e$ 使得 $R\in F(e)$. 所以面積

$$T=\frac{abc}{4R}=\frac{abc}{4R\sqrt{e}}\sqrt{e}\in F(e).$$

而另一方面, 由“有理三角形”的定義知: $T\in\mathbb{Q}$.

又, 顯然 $T\neq 0$, 由 $T\in\mathbb{Q}$ 結合引理 1 即知: 對有理三角形有 $e=1$. 再結合定理 1 和引理 1 即可推得:

**定理** 2: $\triangle ABC$ 是有理三角形的充要條件是:

$$\tan\frac{A}{2},\tan\frac{B}{2},\tan\frac{C}{2} \text{ 中的兩者及外接圓半徑 } R\in\mathbb{Q}^+.$$

由定理 2, 對有理三角形 $ABC$ 可設 $\tan\dfrac{A}{2}=u$, $\tan\dfrac{B}{2}=v$, $4R=k$, 其中 $u,v,k\in\mathbb{Q}^+$. 此時

$$\tan\frac{C}{2}=\frac{1-\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}}{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}}=\frac{1-uv}{u+v}\quad(\text{其中 } uv<1).$$

這樣, 由定理 2, 正弦定理及萬能公式即可得:

**公式** I: $\triangle ABC$ 是有理三角形的充要條件是其三邊長可由如下公式給出:

$$\begin{cases} a = \dfrac{ku}{1+u^2} \\ b = \dfrac{kv}{1+v^2} \\ c = \dfrac{k(u+v)(1-uv)}{(1+u^2)(1+v^2)} \end{cases}.$$

其中 $u, v, k \in \mathbb{Q}^+$ 且 $uv < 1$. 參數的幾何意義是:$\tan\dfrac{A}{2} = u$, $\tan\dfrac{B}{2} = v$, $4R = k$.

注: 公式 I 是通過定理 2 中的充要條件去構造出來的, 其充分必要性是由定理 2 保證的。事實上, 可算得其面積爲:

$$T = \frac{abc}{4R} = \frac{k^2uv(u+v)(1-uv)}{(1+u^2)^2(1+v^2)^2} \in \mathbb{Q}^+.$$

## 3. 本原 Heron 數組公式

公式 I 給出了有理三角形的三邊長公式。爲了推得本原 Heron 數組公式, 我們還需要將公式 I 中的邊適當放大 — 放大到使公式 I 中 $a, b, c, T \in \mathbb{Z}^+$ 且 $(a, b, c) = 1$. 而公式 I 中的參數 $k$ 顯然就相當於三邊長的伸縮係數, 所以在放大的過程中, 關鍵是要找到 $k$ 的恰當取值。

我們先尋找使公式 I 中 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ 且 $(a, b, c) = 1$ — 即是使 $\triangle ABC$ 是面積爲有理數的本原整邊三角形 — 的 $k$ 的恰當取值。

對公式 I 中的有理數 $u, v$, 我們設: $u = \dfrac{n}{m}$, $v = \dfrac{t}{s}$. 其中

$$m, n, s, t \in \mathbb{Z}^+, \quad (m, n) = (s, t) = 1, \quad ms > nt \ (\text{因 } uv < 1).$$

將其代入公式 I 後, 稍加觀察即知: 爲使 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$ 且 $(a, b, c) = 1$, 需且只需令 $k = \dfrac{(m^2+n^2)(s^2+t^2)}{d}$ 即可 — 其中 $d$ 由下面的式 (1) 確定。這樣, 由公式 I 即得:

**公式** II: $\triangle ABC$ 是面積爲有理數的本原整邊三角形的充要條件是其三邊長可由如下公式給出:

$$\begin{cases} a = \dfrac{mn(s^2+t^2)}{d} \\ b = \dfrac{st(m^2+n^2)}{d} \\ c = \dfrac{(mt+ns)(ms-nt)}{d} \end{cases}.$$

其中 $m, n, s, t \in \mathbb{Z}^+$, $(m, n) = (s, t) = 1$, $ms > nt$.

參數的幾何意義是: $\tan\dfrac{A}{2}=\dfrac{n}{m}$, $\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{t}{s}$, $4R=\dfrac{(m^2+n^2)(s^2+t^2)}{d}$.

觀察公式 II, 爲使 $a,b,c\in\mathbb{Z}^+$ 且 $(a,b,c)=1$, $d$ 顯然應由如下的式 (1) 確定:

$$d=\big(mn(s^2+t^2),st(m^2+n^2),(mt+ns)(ms-nt)\big). \tag{1}$$

式 (1) 較複雜, 下面我們將它化簡。觀察式 (1) 中的前兩項, 我們可將 $d$ 分解爲:

$$d=d_1d_2=d_1'd_2'.$$

其中 $d_1\mid mn$, $d_2\mid(s^2+t^2)$; $d_1'\mid st$, $d_2'\mid(m^2+n^2)$.
而

$$(m,n)=1\ \Rightarrow\ (mn,m^2+n^2)=1\ \Rightarrow\ (d_1,d_2')=1.$$

$$\therefore\ d_1d_2=d_1'd_2'\ \Rightarrow\ d_1\mid d_1'd_2'\ \Rightarrow\ d_1\mid d_1'.$$

同理可證: $d_1'\mid d_1$. 所以有: $d_1=d_1'$.

代回化簡得: $d_2=d_2'$.

再結合上面的“ $d_1\mid mn$, $d_2\mid(s^2+t^2)$; $d_1'\mid st$, $d_2'\mid(m^2+n^2)$”有:

$$d_1\mid(mn,st). \tag{2}$$

$$d_2\mid(m^2+n^2,s^2+t^2). \tag{3}$$

又注意到 $(m,n)=(s,t)=1$, 所以 $(mn,m^2+n^2)=(st,s^2+t^2)=1$. 再結合式 (2) 式 (3) 可知:

$$(d_1,d_2)=1. \tag{4}$$

$$(d_1,(m^2+n^2)(s^2+t^2))=1. \tag{5}$$

$$(d_2,mnst)=1. \tag{6}$$

另外易算得

$$(mt+ns)(ms-nt)=mn(s^2-t^2)+st(m^2-n^2). \tag{7}$$

由式 (1) 式 (7) 知 $(mn,st)\mid d$. 而由式 (6) 知 $(mn,st)$ 與 $d_2$ 互質。因 $d=d_1d_2$, 所以 $(mn,st)\mid d_1$. 再結合式 (2) 得:

$$d_1=(mn,st).$$

下面我們將證明 $d_2=(mt+ns,ms-nt)$, 這只需證明如下的引理 5 和引理 6。

**引理** 5: 在公式 II 中有: $d_2\mid(mt+ns,ms-nt)$.

**證明**: 因 $d = d_1 d_2$, 則 $d_2 \mid d$; 又, 公式 II 中 $a, b, c \in \mathbb{Z}^+$, 則 $d_2 \mid (a+b+c)d$.

將公式 II 中 $a, b, c$ 的表達式及式 (7) 代入其中可得: $d_2 \mid 2ms(mt+ns)$. 再結合式 (6) 得: $d_2 \mid 2(mt+ns)$.

(i) 若 $d_2$ 爲奇數, 顯然有 $d_2 \mid (mt+ns)$.

(ii) 若 $d_2$ 爲偶數, 由式 (3) 知 $m^2+n^2$, $s^2+t^2$ 必定都爲偶數。再注意到 $(m,n) = (s,t) = 1$, 所以 $m, n, s, t$ 必定全爲奇數。所以

$$m^2 + n^2 \equiv s^2 + t^2 \equiv 2 \pmod 4.$$

$$mt + ns \text{ 爲偶數。}$$

再結合“$d_2$ 爲偶數”及式 (3) 可知: $d_2 \equiv 2 \pmod 4$. 這表明: $\dfrac{d_2}{2}$ 爲奇數。則有:

$$d_2 \mid 2(mt+ns) \ \Rightarrow \ \frac{d_2}{2} \,\Big|\, 2 \cdot \frac{mt+ns}{2} \ \Rightarrow \ \frac{d_2}{2} \,\Big|\, \frac{mt+ns}{2} \ \Rightarrow \ d_2 \mid (mt+ns).$$

綜上可得: $d_2 \mid (mt+ns)$.

同理, 再從 $d_2 \mid (b+c-a)d$ 出發可證得: $d_2 \mid (ms-nt)$.

所以有: $d_2 \mid (mt+ns, ms-nt)$. □

**引理**6: 在公式 II 中有: $(mt+ns, ms-nt) \mid d_2$.

**證明**: 記

$$d_3 = (mt+ns, ms-nt). \tag{8}$$

則存在 $p, q \in \mathbb{Z}^+$, 使得:

$$mt + ns = pd_3, \tag{9}$$

$$ms - nt = qd_3. \tag{10}$$

由 $(9) \times n + (10) \times m$ 和 $(9) \times m - (10) \times n$ 得:

$$(m^2+n^2)s = (pn+qm)d_3, \qquad (m^2+n^2)t = (pm-qn)d_3.$$

結合 $(s,t) = 1$ 可知:

$$m^2 + n^2 = (pn+qm, pm-qn)d_3.$$

這表明:

$$d_3 \mid (m^2+n^2). \tag{11}$$

同理可證:

$$d_3 \mid (s^2+t^2). \tag{12}$$

由式 (1), (8), (11), (12) 可知: $d_3 \mid d$.

而由式 (5), (11), (12) 知 $d_3$ 與 $d_1$ 互質, 又 $d=d_1d_2$, 所以 $d_3 \mid d_2$. 即: $(mt+ns, ms-nt) \mid d_2$. □

由引理 5 和引理 6 即得: $d_2=(mt+ns, ms-nt)$.

這樣我們就完成了對 $d$ 的化簡, 即: $d=d_1d_2$. 其中

$$d_1=(mn, st), \quad d_2=(mt+ns, ms-nt).$$

公式 II 是面積爲有理數的本原整邊三角形的三邊長公式。而本原 Heron 三角形還要求面積也爲整數。那麼, 這兩種三角形之間是什麼關係呢?

下面我們計算一下公式 II 中三角形的面積。由公式 II 並結合參數的幾何意義可知 (也可由 Heron 公式直接算得):

$$T=\frac{abc}{4R}=\frac{mnst(mt+ns)(ms-nt)}{d^2}.$$

而前面已將 $d$ 分解爲 $d_1d_2$ — 其中 $d_1=(mn, st)$, $d_2=(mt+ns, ms-nt)$. 結合上式可知: $T\in\mathbb{Z}^+$.

因此, 面積爲有理數的本原整邊三角形的面積其實也爲整數。這表明:

$$\{面積爲有理數的本原整邊三角形\} \subseteq \{本原 Heron 三角形\}。$$

而另一方面, 由兩者的定義可知:

$$\{面積爲有理數的本原整邊三角形\} \supseteq \{本原 Heron 三角形\}。$$

這表明: {面積爲有理數的本原整邊三角形} = {本原 Heron 三角形}. 兩者在本質上是相同的, 即:

**定理** 3: 面積爲有理數的本原整邊三角形即是本原 Heron 三角形。

**推論**: 面積爲有理數的整邊三角形即是 Heron 三角形。

由定理 3 可知: 公式 II 其實就是本原 Heron 數組公式。現在我們可以把它完整地重新寫作:

**公式** III(**本原** Heron **數組公式**): $\triangle ABC$ 是本原 Heron 三角形的充要條件是其三邊長可由如下公式給出:

$$\begin{cases} a = \dfrac{mn(s^2+t^2)}{d_1 d_2} \\ b = \dfrac{st(m^2+n^2)}{d_1 d_2} \\ c = \dfrac{(mt+ns)(ms-nt)}{d_1 d_2} \end{cases}.$$

其中 $m,n,s,t \in \mathbb{Z}^+$, $(m,n)=(s,t)=1$, $ms>nt$. $d_1=(mn,st)$, $d_2=(mt+ns,ms-nt)$.

參數的幾何意義是:

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{n}{m},\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{t}{s},\quad R=\frac{(m^2+n^2)(s^2+t^2)}{4d_1d_2}.$$

注: (i) 本原 Heron 數組公式實質上是本原 Heron 三角形的構造性定義;
(ii) 對於公式 III, 可能會有不同的參數化得到相同的本原 Heron 三角形。如果希望本原 Heron 三角形的參數化具有唯一性, 可對公式 III 中的參數再附加如下限制條件:

$$\frac{n}{m}\le\frac{t}{s}\le\frac{ms-nt}{mt+ns}\ (\text{其中 } \frac{n}{m}\in\left(0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \text{ 且兩個“}\le\text{”不會同時取等})。$$

上述條件其實等價於“$\tan\frac{A}{2}\le\tan\frac{B}{2}\le\tan\frac{C}{2}$”, 或者說等價於“$a\le b\le c$”(兩個“$\le$”不會同時取等)。

公式 III 中的參數引入的是 $A, B$ 這兩個角的半角的正切值。但從對稱性考慮, 我們有時要用到 $C$ 的半角的正切值。此時有:

**定理** 4: 對於本原 Heron 三角形 $ABC$, 若

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{n}{m},\quad \tan\frac{B}{2}=\frac{t}{s},\quad \tan\frac{C}{2}=\frac{q}{p};$$

$$d_2=(mt+ns,ms-nt),\quad d_3=(mq+np,mp-nq),\quad d_4=(pt+qs,ps-qt).$$

其中參數 $m,n,s,t,p,q\in\mathbb{Z}^+$ 且 $(m,n)=(s,t)=(p,q)=1,\ ms>nt$. 則

$$(mn,st)=(st,pq)=(pq,mn);$$

$$d_2d_3=m^2+n^2,\quad d_3d_4=p^2+q^2,\quad d_4d_2=s^2+t^2.$$

**證明**: 因 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}=1$, 將 $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$,

的表達式代入可知 (注意 $(p,q)=1$):

$$\frac{q}{p}=\frac{ms-nt}{mt+ns};$$

$$p=\frac{mt+ns}{d_2},\qquad q=\frac{ms-nt}{d_2}.$$

由此並結合式 (6) “$(d_2,mnst)=1$”和式 (7) 有:

$$(mn,pq)=(mn,d_2^2pq)=(mn,(mt+ns)(ms-nt))=(mn,st(m^2-n^2))=(mn,st).$$

最後一步是因爲: 在 $(m,n)=1$ 時顯然有 $(mn,m^2-n^2)=1$.

同理可證 $(st,pq)=(st,mn)$. 由此即得: $(mn,st)=(st,pq)=(pq,mn)$.

下證第 2 個結論。將上面得到的 $p,q$ 的表達式代入可得:

$$mq+np=\frac{s(m^2+n^2)}{d_2},\qquad mp-nq=\frac{t(m^2+n^2)}{d_2}.$$

由此並結合 $(s,t)=1$ 和式 (3) “$d_2\mid(m^2+n^2,s^2+t^2)$”可得:

$$d_3=(mq+np,mp-nq)=\frac{m^2+n^2}{d_2}.$$

去分母得:

$$d_2d_3=m^2+n^2.$$

同理可證另外兩式。 □

**推論**: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, 參數的意義同公式 III 和定理 4, 有:

$$(a,b)=(d_3,d_4),\quad (b,c)=(d_2,d_3),\quad (c,a)=(d_4,d_2);\quad (d_2,d_3,d_4)=1.$$

**證明**: 由定理 4 有: $d_1=(mn,st)=(st,pq)=(pq,mn)$, 因此 $\left(\dfrac{mn}{d_1},\dfrac{st}{d_1}\right)=1$.

又注意到 $(m,n)=(s,t)=1$, 所以 $(mn,m^2+n^2)=(st,s^2+t^2)=1$.

公式 III 結合定理 4 即得:

$$(a,b)=\Big(\frac{mn}{d_1}\cdot\frac{s^2+t^2}{d_2},\frac{st}{d_1}\cdot\frac{m^2+n^2}{d_2}\Big)=\Big(\frac{s^2+t^2}{d_2},\frac{m^2+n^2}{d_2}\Big)=(d_3,d_4).$$

同理可證另外兩式。

又, 因爲公式 III 給出的 Heron 三角形 $ABC$ 是本原的, 顯然必有: $(d_2,d_3,d_4)=1$. □

**公式** IV: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, 其面積 $T$ 和內切圓半徑 $r$ 及旁切圓半徑 $r_a, r_b, r_c$ 分別由如下公式給出:

$$T=\frac{mnst(mt+ns)(ms-nt)}{d_1^2d_2^2};$$

$$r=\frac{nt(ms-nt)}{d_1d_2},\ r_a=\frac{ns(mt+ns)}{d_1d_2},\ r_b=\frac{mt(mt+ns)}{d_1d_2},\ r_c=\frac{ms(ms-nt)}{d_1d_2}.$$

**證明**: 設 $\triangle ABC$ 半周長爲 $p$, 由公式 III 可知:

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{ms(mt+ns)}{d_1d_2};$$

$$p-a=\frac{mt(ms-nt)}{d_1d_2},\quad p-b=\frac{ns(ms-nt)}{d_1d_2},\quad p-c=\frac{nt(mt+ns)}{d_1d_2}.$$

由此即知面積:$T=\dfrac{mnst(mt+ns)(ms-nt)}{d_1^2d_2^2}$.

內切圓半徑: $r=\dfrac{T}{p}=\dfrac{nt(ms-nt)}{d_1d_2}$. 同理, 由 $r_a=\dfrac{T}{p-a}$, $r_b=\dfrac{T}{p-b}$, $r_c\dfrac{T}{p-c}$, 可算得另外三個。 □

將 Heron 公式改寫爲關於 $x,y,z,w$ 的不定方程:

$$w^2=p(p-x)(p-y)(p-z)\quad (\text{其中 } p=\frac{1}{2}(x+y+z))。\tag{13}$$

不妨稱之爲 Heron 方程。它在 $w=0$ 時的整數解是平凡的。而公式 III 顯然給出了它的本原正整數解的通解公式。將 Heron 方程展開, 可知其中 $x,y,z,w$ 的次數均爲偶數。由此, 我們不難得到其非平凡整數解的通解公式。即有:

**定理** 5: Heron 方程 (13)的非平凡整數解的通解公式爲:

$$\begin{cases} x=\pm\dfrac{kmn(s^2+t^2)}{d_1d_2}\\ y=\pm\dfrac{kst(m^2+n^2)}{d_1d_2}\\ z=\pm\dfrac{k(mt+ns)(ms-nt)}{d_1d_2}\\ w=\pm\dfrac{k^2mnst(mt+ns)(ms-nt)}{d_1^2d_2^2}\end{cases}.$$

其中 $k,m,n,s,t\in\mathbb{Z}^+$, $(m,n)=(s,t)=1$, $ms>nt$. $d_1=(mn,st)$, $d_2=(mt+ns,ms-nt)$.

而公式 I 實質上是給出了 Heron 方程 (13) 的正有理數解的通解公式。由此不難得到其在 $w\neq 0$ 時的有理數解的通解公式 (略)。

# 4. 兩種特殊 Heron 三角形的本原數組公式

## 4.1. 本原等腰 Heron 三角形

不妨設 $A=B$, 則 $\tan\dfrac{A}{2}=\tan\dfrac{B}{2}<1$. 由本原 Heron 數組公式可知:

$$m=s,\ n=t \text{ 且 } m>n;$$
$$d_1=mn,\quad d_2=(2mn,m^2-n^2)=(2,m^2-n^2).$$

(i) $a=b=m^2+n^2$, $c=2(m^2-n^2)$. 其中正整數 $m,n$ 奇偶性相反, $(m,n)=1$, $m>n$.

(ii) $a=b=\dfrac{m^2+n^2}{2}$, $c=m^2-n^2$. 其中正整數 $m,n$ 均爲奇數, $(m,n)=1$, $m>n$.

在 (ii) 中作代換: $m\to m+n$, $n\to m-n$, 可知 (ii) 與下面這個公式的結果在本質上相同:

$$a=b=m^2+n^2,\ c=4mn\text{。其中正整數 } m,n \text{ 奇偶性相反, } (m,n)=1, m>n\text{。}$$

因此 (i), (ii) 可以合寫成更爲簡潔的 (本原等腰 Heron 數組公式):

$$a=b=m^2+n^2,\quad c=2(m^2-n^2) \text{ 或 } 4mn\text{。}$$

其中正整數 $m,n$ 奇偶性相反, $(m,n)=1$, $m>n$.

由這個公式可知: 本原等腰 Heron 三角形其實是由兩個全等的本原勾股三角形拼合而成。

## 4.2. 三邊長成等差數列的本原 Heron 三角形

不妨設 $a+b=2c$. 可以證明它等價於: $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}=\dfrac{1}{3}$. 由本原 Heron 數組公式可知: $ms=3nt$. 注意到 $(m,n)=(s,t)=1$, 易推得: $m\mid 3t$ 且 $t\mid m$. 因此僅有兩種可能:

$$m=t,\ s=3n \text{ 或者 } m=3t,\ s=n\text{。}$$

考慮到對等性, 不妨取前者, 代入本原 Heron 數組公式可知:

$$d_1=mn,\quad d_2=(2mn,m^2+3n^2)=(2,m^2+3n^2).$$

(i) $a=m^2+9n^2$, $b=3(m^2+n^2)$, $c=2(m^2+3n^2)$. 其中正整數 $m,n$ 奇偶性相反, $(m,3n)=1$.

(ii) $a=\dfrac{m^2+9n^2}{2}$, $b=\dfrac{3(m^2+n^2)}{2}$, $c=m^2+3n^2$. 其中正整數 $m,n$ 均爲奇數, $(m,3n)=1$.

上述結果與刊於貴刊的文獻 [7] 中的結果是一致的。

另外, 由本原 Heron 數組公式也可得到大家熟知的本原勾股數組公式, 這裡不再贅述。

## 5. 關於本原 Heron 三角形的若干結果

由公式 III(本原 Heron 數組公式) 所構造出的本原Heron 三角形不但是純粹的而且還是完備的。因此, 此公式對於研究本原 Heron 三角形的性質具有非常重要的作用。本節中我們就利用這個公式去推導本原 Heron 三角形的一些性質。

**定理**6 (見文獻 [8]): 本原Heron 三角形的三邊長必爲兩奇一偶。

定理 6 以及後面定理 7 的推論, 在文獻 [8] 中都是用同餘的知識證明的。現在我們可以借助本原 Heron 數組公式來證明。

**證明**: 由公式 IV 證明中的計算結果並結合 $d_1 = (mn, st)$, $d_2 = (mt+ns, ms-nt)$, $(d_1, d_2) = 1$ 可知:

$$\frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{stm^2+mns^2}{d_1 d_2} = \frac{ms(mt+ns)}{d_1 d_2} \in \mathbb{Z}^+.$$

因此 $a+b+c$ 爲偶數。又 $(a,b,c)=1$, 顯然 $a,b,c$ 必爲兩奇一偶。 □

**定理**7: 對本原 Heron 三角形 $ABC$, 若 $m,n,s,t,p,q \in \mathbb{Z}^+$, $(m,n)=(s,t)=(p,q)=1$ 且:

$$\tan\frac{A}{2} = \frac{n}{m}, \quad \tan\frac{B}{2} = \frac{t}{s}, \quad \tan\frac{C}{2} = \frac{q}{p}.$$

則其面積

$$T = [mn, st, pq].$$

**證明**: 由定理 4, 可設 $d_1 = (mn, st) = (st, pq) = (pq, mn)$. 由此可再設:

$$mn = d_1 U, \quad st = d_1 V, \quad pq = d_1 W.$$

其中正整數 $U,V,W$ 兩兩互質。

代入公式 IV 中的面積公式可得 (用到定理 4 證明中得到的 $p,q$ 的表達式):

$$\begin{aligned} T &= \frac{mnst(mt+ns)(ms-nt)}{d_1^2 d_2^2} = \frac{mnstpq}{d_1^2} = d_1 UVW \\ &= [d_1 U, d_1 V, d_1 W] = [mn, st, pq]. \end{aligned}$$ □

由定理 7 可以推出文獻 [8] 中的如下結論:

**推論** (見文獻 [8]): 本原 Heron 三角形的面積必爲 6 的倍數。

**證明**: 由定理 7 知, 我們只需證明 $m, n, s, t, p, q$ 中至少有一個是偶數且至少有一個是 3 的倍數。

(i) 假設這 6 者均爲奇數。則 $m^2 \equiv n^2 \equiv s^2 \equiv t^2 \equiv p^2 \equiv q^2 \equiv 1 (\bmod 4)$, 因此有: $m^2+n^2 \equiv s^2+t^2 \equiv p^2+q^2 \equiv 2 (\bmod 4)$. 結合定理4有:

$$d_2d_3 \equiv d_3d_4 \equiv d_4d_2 \equiv 2 (\bmod 4).$$

另一方面, 由抽屜原理易知: $d_2, d_3, d_4$ 中至少有兩者的奇偶性相同。那麼這兩者之積或爲 4 的倍數, 或爲奇數。這與上式矛盾!
矛盾表明: 假設不成立。即其中至少有一個是偶數。

(ii) 假設這 6 者均不爲3的倍數。則 $m^2 \equiv n^2 \equiv s^2 \equiv t^2 \equiv p^2 \equiv q^2 \equiv 1 (\bmod 3)$, 因此有: $m^2+n^2 \equiv s^2+t^2 \equiv p^2+q^2 \equiv 2 (\bmod 3)$. 結合定理 4 有:

$$d_2d_3 \equiv d_3d_4 \equiv d_4d_2 \equiv 2 (\bmod 3).$$

上式表明: $d_2, d_3, d_4$ 都不是 3 的倍數。由此易知: 這三者中至少有兩者 mod 3 同餘 (但不同餘於 0)。那麼這兩者之積 mod 3 必同餘於 1。這與上式矛盾!
矛盾表明: 假設不成立。即這 6 者中至少有一個是 3 的倍數。

由結論 (i)(ii) 並結合定理 7 可知: 本原 Heron 三角形的面積必爲 6 的倍數。 □

但這個推論的逆命題並不成立, 即: 不是每個形如 $6k$ $(k \in \mathbb{Z})$ 的正整數都能成爲某個本原 Heron 三角形的面積 (按文獻 [9] 的結果, 18 就不可能是)。

**定理**8: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, $c$ 邊上的高爲整數的充要條件是 $d_2 \mid 2$.

或者等價地表述爲:

**定理** 9: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, 它可被 $c$ 邊上的高分解的充要條件是 $d_2 \mid 2$.

**證明**: 記 $c$ 邊上高爲 $h_c$, 由公式 III 和公式 IV 可得: $h_c = \dfrac{2T}{c} = \dfrac{2mnst}{d_1d_2}$.

注意到在公式 III 中有 $d_1 = (mn, st)$, 又結合式 (6) “$(d_2, mnst) = 1$”有:

$$h_c \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow d_2 \mid 2.$$

□

**定理** 10: 本原勾股三角形有且僅有兩條高 (即它的兩條直角邊) 爲整數; 而對於不是勾股三角形的本原 Heron 三角形, 最多只有一條高爲整數。

**證明**: (i) 設本原勾股三角形 $ABC$ 的斜邊爲 $c$. 顯然只需證 $c$ 邊上的高 $h_c$ 不爲整數即可。

**熟知**: 本原勾股三角形 $ABC$ 中 $a, b, c$ 兩兩互質, 而 $c \neq 1$, 所以

$$h_c = \frac{ab}{c} \notin \mathbb{Z}^+.$$

(ii) 不妨設本原 Heron 三角形 $ABC$ 由公式 III 給出, 由此我們可以直接採用定理 4 中所設的參數。

假設此三角形有兩條高爲整數, 不妨設 $b, c$ 邊上的高 $h_b, h_c$ 爲整數。由定理 8 知:

$$h_b \in \mathbb{Z}^+, \quad h_c \in \mathbb{Z}^+ \Leftrightarrow \ d_2 \mid 2, \ d_3 \mid 2 \ \Rightarrow \ d_2 d_3 \mid 4.$$

而由定理 4 知: $d_2 d_3 = m^2 + n^2$. 代入可得:

$$(m^2 + n^2) \mid 4.$$

另一方面, 由公式 III 中參數的幾何意義知: $\tan \dfrac{A}{2} = \dfrac{n}{m}$, 其中 $(m, n) = 1$. 但對於不是勾股三角形的本原 Heron 三角形而言, $m, n$ 不可能都等於 1 (否則 $A$ 爲直角), 則 $m^2 + n^2 \geq 1^2 + 2^2 = 5$. 這與 $(m^2 + n^2) \mid 4$ 矛盾。

矛盾表明: 假設不成立! 因此它最多只有一條高爲整數。 □

**定理** 10 **表明**: 本原勾股三角形不可能被斜邊上的高分解; 而對於不是本原勾股三角形的本原 Heron 三角形, 如果它可分解的話, 那麼其分解方式將是唯一的。

**定理** 11: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$ 當且僅當 $(m, s) = (n, t)$ 且 $(m, t) = (n, s)$.

**證明**: 對於公式 III 中的那些參數, 我們再設

$$d_{11} = (m, s), \quad d_{12} = (m, t), \quad d_{21} = (n, s), \quad d_{22} = (n, t).$$

注意到在公式 III 中有 $(m, n) = (s, t) = 1$, 因此其中的 $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ 顯然兩兩互質。且有

$$d_1 = (mn, st) = (m, st)(n, st) = (m, s)(m, t)(n, s)(n, t) = d_{11} d_{12} d_{21} d_{22}.$$

再結合式 (4) "$(d_1, d_2) = 1$" 知: $d_{11}, d_{12}, d_{21}, d_{22}$ 都與 $d_2$ 互質。

由此我們可再設:

$$m = d_{11} d_{12} p_1, \quad n = d_{21} d_{22} p_2, \quad s = d_{11} d_{21} p_3, \quad t = d_{12} d_{22} p_4.$$

並且由 $(m, n) = 1$ 知: $p_1, p_2$ 互質; 由 $d_{11} = (m, s)$ 知: $p_1, p_3$ 互質; 由 $d_{12} = (m, t)$ 知: $p_1, p_4$ 互質。

由此易知: $p_1, p_2, p_3, p_4$ 兩兩互質。

因 $d_{11}=(m,s)$, 而 $(m,n)=(s,t)=1$, 結合上面的“$n=d_{21}d_{22}p_2$, $t=d_{12}d_{22}p_4$” 有:

$$(d_{11}, ms-nt)=(d_{11}, nt)=1, \quad (d_{11}, p_2p_4)=1.$$

再結合公式 IV 即有 (注意 $d_2=(mt+ns, ms-nt)$):

$$\begin{aligned}
r\in\mathbb{N} \Leftrightarrow r &= \frac{nt(ms-nt)}{d_1d_2}\in\mathbb{N}\\
\Leftrightarrow r &= \frac{d_{21}d_{12}d_{22}^2p_2p_4}{d_{11}d_{12}d_{21}d_{22}}\cdot\frac{ms-nt}{d_2}\in\mathbb{N}\\
\Leftrightarrow r &= \frac{d_{22}p_2p_4}{d_{11}}\cdot\frac{ms-nt}{d_2}\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\ d_{11}\mid d_{22}.
\end{aligned}$$

同理有

$$r_a\in\mathbb{N}\ \Leftrightarrow d_{21}\mid d_{12}, \quad r_b\in\mathbb{N}\ \Leftrightarrow\ d_{12}\mid d_{21}, \quad r_c\in\mathbb{N}\ \Leftrightarrow\ d_{22}\mid d_{11}.$$

因此有

$$r, r_a, r_b, r_c\in\mathbb{N}\Leftrightarrow\ d_{11}=d_{22},\ d_{12}=d_{21}.$$

這正是我們要證的。 □

注意到在公式 III 中有 $(m,n)=(s,t)=1$, 因此定理 11 也等價於:

**定理**12: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, $r, r_a, r_b, r_c\in\mathbb{N}$ 的充要條件是 $m, n, s, t$ 兩兩互質。

對於文獻 [5] 定理 1.1 (即本文中的命題 1) 證明中給出的那一類“滿足 $r, r_a, r_b, r_c\in\mathbb{N}$ 的可分解的銳角本原 Heron 三角形”, 現在我們可以反推出它對應於公式 III 中諸參數的如下取值:

$$m=\Big(\frac{k}{2}\Big)^2, \quad n=\Big(\frac{k+1}{3}\Big)^2, \quad s=9, \quad t=4.$$

其中正整數 $k\equiv 1262 (\mathrm{mod}\ 3492)$ (此條件等價於 $k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 4)$, $k\equiv 2(\mathrm{mod}\ 9)$, $k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 97)$)。

可以驗證: $m, n, s, t$ 滿足定理 9 和定理 12 的條件。由參數的幾何意義易知其必爲銳角三角形。

由定理 11 證明中的結果可知: $r, r_a, r_b, r_c\notin\mathbb{N}$ 的充要條件是 $d_{11}\nmid d_{22}$, $d_{22}\nmid d_{11}$, $d_{12}\nmid d_{21}$, $d_{21}\nmid d_{12}$. 也即是:

**定理**13: 對於由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$, $r, r_a, r_b, r_c\notin\mathbb{N}$ 的充要條件是: $(m,s)$ 與 $(n,t)$ 互不整除且 $(m,t)$ 與 $(n,s)$ 互不整除。

**定理** 14 (見文獻 [10]): 本原 Heron 三角形的外接圓半徑不可能爲整數。

**證明**: 我們直接使用公式 III 和定理 4 中的符號。由定理7的推論中的證明可知: $m, n, s, t, p, q$ 中至少有一個是偶數。不妨設 $m$ 爲偶數, 因 $(m, n) = 1$, 則 $n$ 爲奇數, 因此 $m^2 + n^2$ 爲奇數。

又 $(s, t) = 1$, 因此 $s^2 + t^2 \equiv 1$ 或 $2(\mathrm{mod}\ 4)$。因此, $(m^2 + n^2)(s^2 + t^2)$ 的質因數分解中 2 的次數最高爲 1。

而由公式 III 中參數的幾何意義知:

$$R = \frac{(m^2 + n^2)(s^2 + t^2)}{4d_1d_2}.$$

上式分母中的因數 $4 = 2^2$. 因此 $R$ 不可能爲整數。 □

## 6. 問題 1 的解決

對於問題 1, 現在即可依據前面得到的結果去構造符合其條件的本原 Heron 三角形。

**定理** 15: 有無窮多個不可分解的銳角本原 Heron 三角形滿足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$. 具體地說, 三邊長由如下公式給出的 $\triangle ABC$ 即滿足題設條件:

$$\begin{cases} a = \dfrac{k(k+1)(5k^2+2k+2)}{13} \\ b = \dfrac{(k-1)(2k+1)(2k^2+2k+1)}{13} \\ c = \dfrac{(3k^2+k-1)(k^2+4k+1)}{13} \end{cases}.$$

其中的參數 $k \in \mathbb{Z}^+$ 且 $k > 2$, $k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 78)$ (即 $k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$ 且 $k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 13)$)。

**證明**: 在公式 III 中令

$$m = k+1,\ n = k,\ s = 2k+1,\ t = k-1.$$

其中的參數 $k \in \mathbb{Z}^+$, $k > 2$ 且 $k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 6)$, $k \equiv 2(\mathrm{mod}\ 13)$。即:

$$k \in \mathbb{Z}^+, \quad k > 2, k \equiv 2(\mathrm{mod}\, 78).$$

顯然滿足 $(m, n) = (m, s) = (m, t) = (n, t) = (n, s) = 1$. 而

$$(s, t) = (2k+1, k-1) = (3, k-1) = 1.$$

這就滿足了定理 12 中“$m, n, s, t$ 兩兩互質”的條件。因此代入公式 III 給出的將是 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$ 的本原 Heron 三角形。

又, 由公式 III 中參數的幾何意義有 (注意 $k>2$):

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{n}{m}=\frac{k}{k+1},\ \tan\frac{B}{2}=\frac{t}{s}=\frac{k-1}{2k+1}<1,\ \tan\frac{C}{2}=\frac{ms-nt}{mt+ns}=\frac{k^2+4k+1}{3k^2+k-1}<1.$$

因此 $A,B,C$ 均爲銳角, 即由這些參數生成的本原 Heron 三角形必爲銳角三角形。

對於公式 III 中的 $d_1$ 顯然有

$$d_1=(mn,st)=1.$$

又

$$mt+ns=3k^2+k-1,\quad ms-nt=k^2+4k+1.$$

所以對公式 III 中的 $d_2$ 有:

$$d_2=(mt+ns,ms-nt)=(3k^2+k-1,k^2+4k+1).$$

因 $(3k^2+k-1)+(k^2+4k+1)=k(4k+5)$. 而 $(k,k^2+4k+1)=1$, 所以

$$\begin{aligned}d_2&=(k(4k+5),k^2+4k+1)=(4k+5,k^2+4k+1)\\&=(4k+5,k^2-4)=(4k+5,(k+2)(k-2))\end{aligned}$$

注意到 $k\equiv 2(\text{mod } 6)$, $k\equiv 2(\text{mod } 13)$, 則

$$k+2\equiv 4(\text{mod}\,6),\quad k+2\equiv 4(\text{mod}\,13),\quad k-2\equiv 0(\text{mod}\,13).$$

因此有:

$$(4k+5,k+2)=(-3,k+2)=1,\quad (4k+5,k-2)=(13,k-2)=13.$$

綜上可知:

$$d_2=(4k+5,(k+2)(k-2))=(4k+5,k-2)=13.$$

結合定理 9 可知: 由公式 III 給出的本原 Heron 三角形 $ABC$ 的 $c$ 邊上的高不爲整數。

下面我們證明其 $a,b$ 邊上的高也不爲整數。我們直接採用定理 4 中所設的參數。

注意到 $k>2$ 且 $k\equiv 2(\text{mod } 78)$, 且前面已證得 $d_2=13$. 代入定理 4 可知:

$$\begin{aligned}d_3&=\frac{m^2+n^2}{d_2}=\frac{2k^2+2k+1}{13}>2,\\d_4&=\frac{s^2+t^2}{d_2}=\frac{5k^2+2k+2}{13}>2.\end{aligned}$$

顯然 $d_3,d_4$ 均不整除 2。結合定理 8 知: $a,b$ 邊上的高也不爲整數。

將上述諸式代入公式 III 即可得定理 15 中的那簇本原 Heron 三角形。

綜合上述討論可知: 這簇三角形是不可分解的銳角本原 Heron 三角形且滿足 $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$. □

將上述諸式代入公式 IV 可知定理 15 中的本原 Heron 三角形的面積

$$T = \frac{k(k-1)(k+1)(2k+1)(3k^2+k-1)(k^2+4k+1)}{13^2}.$$

由此, 也可以不借助於定理 12 和定理 8, 而直接驗證: $r, r_a, r_b, r_c \in \mathbb{N}$ 且它的三條高均不爲整數。這樣, 我們就肯定地回答了問題 1。

## 7. $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$ 的本原 Heron 三角形

利用定理 13 可以構造出 $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$ 的本原 Heron 三角形 $ABC$. 比如在公式 III 中令:

$$m = (u+1)(v+1), \quad n = uv, \quad s = \frac{u}{2}(v+1), \quad t = \frac{v}{2}(u+1).$$

其中 $u, v \in \mathbb{Z}^+$, $u \geq 4$, $v \geq 4$, $(u, v) = 2$ 且 $(u, v+1) = (u+1, v) = (u+1, v+1) = 1$. 可算得:

$$\begin{aligned}
&(m, n) = (s, t) = 1, \quad ms > nt;\\
d_1 &= (mn, st) = \frac{uv}{4}(u+1)(v+1),\\
d_2 &= (mt+ns, ms-nt) = \Big(\frac{v}{2}(v+1)(2u^2+2u+1), \frac{u}{2}(u+1)(2v+1)\Big)\\
&= (2u^2+2u+1, 2v+1).
\end{aligned}$$

易知: $(m, s) = v+1$, $(n, t) = \frac{v}{2}$, $(m, t) = u+1$, $(n, s) = \frac{u}{2}$.

顯然有: $(m, s)$ 與 $(n, t)$ 互不整除且 $(m, t)$ 與 $(n, s)$ 互不整除。

這表明: 參數 $m, n, s, t$ 的取值滿足公式 III 和定理 13 的條件。將上述諸式代入公式 III 即可得到 $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$ 的本原 Heron 三角形 $ABC$. 我們將這個結果寫作:

**定理** 16: 三邊長由如下公式給出的本原 Heron 三角形 $ABC$ 必有 $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$:

$$\begin{cases}
a = \dfrac{u^2(v+1)^2 + v^2(u+1)^2}{d}\\
b = \dfrac{u^2v^2 + (u+1)^2(v+1)^2}{d}\\
c = \dfrac{(2v+1)(2u^2+2u+1)}{d}
\end{cases}.$$

其中 $u, v \in \mathbb{Z}^+$, $u \geq 4$, $v \geq 4$, $(u, v) = 2$ 且 $(u, v+1) = (v, u+1) = (v+1, u+1) = 1$, $d = (2u^2 + 2u + 1, 2v + 1)$.

取 $u = 4$, $v = 6$ 時 $d = 1$, 算得 $a = 1684$, $b = 1801$, $c = 533$, 半周長 $p = 2009 = 7^2 \times 41$, 面積 $T = 2^3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 \times 41$.

取 $u = 10$, $v = 8$ 時 $d = 17$, 算得 $a = 932$, $b = 953$, $c = 221$, 半周長 $p = 1053 = 3^4 \times 13$, 面積 $T = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 11 \times 13$.

由公式 IV 可以驗證這兩個本原 Heron 三角形內接圓及旁切圓半徑均不爲整數。還容易驗證: 第一個可以被 $c$ 邊上的高分解; 而第二個是不可分解的。文獻 [5] 定理 1.2 證明中的那簇本原 Heron 三角形與定理 16 中 $a, b, c$ 的表達式在形式上相似。但文獻 [5] 中那簇本原 Heron 三角形都是可分解的。且定理 16 中 $(a, b, c) = 1$ 由公式 III 保證, $r, r_a, r_b, r_c \notin \mathbb{N}$ 由定理 13 保證, 因此這裡的限制條件比文獻 [5] 中簡潔了許多。

## 8. 後記

Oystein Ore 在文獻 [11] 中說 (潘承彪譯)“我們還沒有一個給出它們全體的一般公式”。在相當長的時間內, 筆者也是這麼認爲的。其實這並不正確。有文章提到: Carmichael 早在文獻 [12] 中就給出過一個3參數的本原 Heron 數組公式 (據說, 該公式最初發表於 1914 年)。在國內也有已故歐陽琦教授在文獻 [13] 中給出過另一個全對稱的 3 參數的本原 Heron 數組公式 (但有一個比較強的附加條件)。本文第3小節中給出的這個 4 參數的公式 III 曾以《本原海倫數組公式》爲名發表在《中學數學》上 (參見文獻 [14])。這次是因審稿老師“這個公式的證明作者引用之前的文章, 建議作者將此公式的證明直接寫出”的建議 — 也正好借機修正舊文中的疏漏之處 — 經重新改寫並增加了部分內容後嵌入到本文之中。非常感謝《數學傳播》給了筆者這樣一個修正舊文的機會。

本文探尋本原 Heron 數組公式的思路是“以退爲進”。從“本原 Heron 三角形”退到“面積爲有理數的本原整邊三角形”, 再退到“有理三角形”, 最後退到“三邊長爲有理數的三角形”。退到這裡後就容易看淸這個簡單得多的問題, 可以得到定理 1 和定理 2, 進而生成公式 I。再返回來, 一步一步地“進”。每進一步就附加部分新的約束條件, 最後回到“本原 Heron 三角形”。這裡, 退的過程是將問題一般化的過程, 而進的過程是將問題特殊化的過程。“先足夠地退到我們最容易看淸楚的地方, 認透了, 鑽深了, 然後再上去”(華羅庚語)。筆者還將這種策略用於研究 Brahmagupta 四邊形 (四邊長及面積均爲正整數的圓內接四邊形) 的構造, 也取得了部分成功 — 能得到其構造方法但無法生成一個如公式 III 那樣完美的構造公式 (參閱文獻 [15])。

能想到“以退爲進”的策略也是偶然。通過高中時代接觸到的雜誌《數學通訊》(曾經用過《中等算學月刊》的刊名), 筆者了解到北京有一個專賣數學書的“九章數學書店”。後來進入重慶教育學院數學系念書之後, 就陸續向該書店郵購了一些數學書來看, 其中就有文獻 [3] 和 [11]。

1995 年暑假的一天夜裡, 翻閱文獻 [3] 時看見裡面提到: 劉天章從三角 (就是引理 4 的那個推論) 著手重新推導了勾股數組公式。我試了一下, 這個方法可以避開解不定方程 $a^2+b^2=c^2$. 立即聯想到: 也許可以避開解 Heron 方程, 而從三角著手尋找 Heron 三角形的構造方法! 由於是從三角著手, 自然地就產生了以退爲進的思路。

最初幾步都很順利, 但到對公式 II 中的 $d$ 進行分解時遇到了困難。開始時受式 (3) 的影響, 作出了一個錯誤的猜測: $d_2=(m^2+n^2, s^2+t^2)$ — 這自然無法證明。後來用 Heron 公式計算面積時發現其中多次出現因式: $mt+ns$, $ms-nt$ (見公式 IV 的證明), 突然意識到: $d_2=(mt+ns, ms-nt)$. 經過一段時間的探索, 成功地對 $d$ 進行了分解。大概在 1995 年 10 月份左右, 最終完成了證明。

隨後我就將其撰寫成文遞交給輔導員, 請系裡的老師幫忙審查一下。感覺沒有問題後, 我就將稿子投給了《數學通訊》。不久後即收到《數學通訊》編委、湖北大學鄧萃林老師的來信。信中說, 第一部分已初審通過, 讓我將第二部分寄過去。寄去之後, 不知爲何後來沒有了回音。我又投給《數學通報》, 也杳無音訊。其時我已被分在一所偏遠的中學任教, 那個年代網路尚未興起, 鄉鎮的資訊非常閉塞。由於鄧老師給我寫過信, 所以知道鄧老師的通訊地址, 我又將稿子重寫後冒昧地寄給鄧老師。雖然鄧老師認爲這篇稿子有一定意義, 但《數學通訊》仍未錄用。一再被拒稿, 我自己也有些懷疑這篇稿子是否有價值。這時鄧老師鼓勵我說, 這篇稿子其實“很有特色”。讓我重新謄寫後再寄給他, 他另找專家再審。在後來的兩三年時間裡, 爲了這篇稿子, 我和鄧老師連番書信往來。最後, 經鄧老師推薦, 這篇稿子得以發表於湖北大學主辦的《中學數學》1999 年第 12 期。這距我初次投稿已經過去了四年時間。

遺憾的是: 當年是初次寫稿沒有經驗, 又在匆忙之際, 未及在文中向鄧老師致謝。在時隔二十餘年之後, 趁此重修舊文之機, 筆者想借貴刊之一角, 用當年的一首小詩表達我對鄧萃林老師誠摯的謝意! 詩曰:

千里傳書爲一文, 幾番寒暑感眞忱。

而今了卻牽腸事, 明月年年寄此心。

## 參考文獻

1. 沈康身。數學的魅力(一)。上海: 上海辭書出版社, 259-262, 2004。
2. 盛立人, 嚴鎮軍。從畢氏定理談起。上海: 上海教育出版社, 22-40, 1985。
3. 李炯生, 黃國勳。中國初等數學研究(1978∼1988)。北京: 科學技術文獻出版社, 36, 1992。
4. Li Zhou, Primitive Heronian Triangles with Integer Inradius and Exradii, *Forum Geometricorum*, 18, 71-77, 2018。
5. 張思匯, 蔣天澤。本原 Heronian 三角形的一個注記。數學年刊 (A 輯), 40(4), 361-364, 2019。
6. 潘承洞, 潘承彪。初等數論。北京: 北京大學出版社, 55, 1992。
7. 邊欣, 李忠民。三邊成等差數列的 Heron 三角形。數學傳播季刊, 36(3), 81-85, 2012。
8. 朱道勳。關於海倫三角形的邊和面積的性質。數學通訊, 9, 20-21, 1999。

9. 常新德。面積爲素數 6 倍的海倫三角形。中學數學, 11, 39-40, 2000。
10. 邊欣。關於完美海倫三角形的存在性。數學教學, 10, 34-35, 2008。
11. 潘承彪 (譯)。O. 奧爾: 有趣的數論。北京: 北京大學出版社, 1985。(Oystein Ore, 1967)
12. R.D. Carmichael, *The Theory of Numbers and Diophantine Analysis*, New York: Dover, 1952。
13. 歐陽琦。海倫數組的公式。中學數學, 10, 29-32, 1994。
14. 吳波。本原海倫數組公式。中學數學, 12, 43-45, 1999。
15. 信步千山。Brahmagupta 四邊形的構造方法。數學傳播季刊, 40(2), 84-93, 2016。

—本文作者任教中國重慶市長壽龍溪中學—

# 勘誤表

第 37 卷 4 期, 第 61 頁 圖八下 4 行。

原爲：且算幾不等試的“等號”成立

應爲：且算幾不等式的“等號”成立

第 37 卷 4 期, 第 61 頁 line -1。

原爲：從 $p = \quad = -d^2$ 可得

應爲：從 $p = \dfrac{3ac-b^2}{3a^2} = -d^2$ 可得

第 38 卷 4 期, 第 68 頁內文 line 1。

原爲：觀察 $\cos\theta = \cos\theta$, $\cos 2\theta = -1+2\cos^2\theta$, $\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^2\theta$,

應爲：觀察 $\cos\theta = \cos\theta$, $\cos 2\theta = -1+2\cos^2\theta$, $\cos 3\theta = -3\cos\theta + 4\cos^3\theta$,

第 38 卷 4 期, 第 68 頁 line -9。

原爲：假若 $\cos n\theta$ 可表爲一個 $\cos\theta$ 的 $n$ 次多項,

應爲：假若 $\cos n\theta$ 可表爲一個 $\cos\theta$ 的 $n$ 次多項式,

第 44 卷 2 期, 第 84 頁 line -3。

原爲：令 $f'(x) = p\beta x^{\beta-1} - \alpha x^{\alpha-1} = 0$,

應爲：令 $f'(t) = p\beta t^{\beta-1} - \alpha t^{\alpha-1} = 0$,

第 49 卷 4 期, 第 70 頁 參考文獻 [13]。

原爲：劉毓璋。解析幾何群論合訂本。1974。

應爲：劉毓璋。解析幾何詳論合訂本。1974。